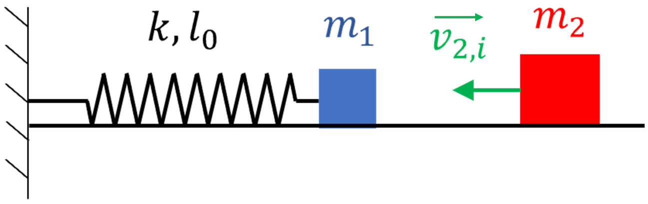
Série 9

Exercice S9E1* (15 min) : Choc et ressort



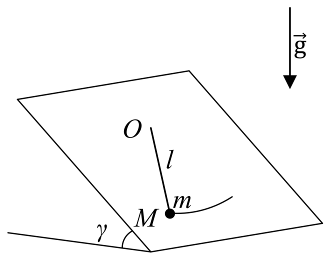
On considère une masse m_1 qui peut glisser sans frottements sur le sol horizontal. Elle est attachée à un ressort de raideur k et de longueur au repos l_0, lui-même fixé à une paroi immobile. On lance une masse m_2 contre m_1 avec une vitesse $\vec{v}_{2,i}$. Les deux masses restent collées après le choc. On notera $x(t)$ la position du système composé des deux masses après le choc.

a) Déterminez l'équation différentielle du second ordre régissant l'évolution de x au cours du temps.

b) Exprimez $x(t)$ en fonction des données du problème.

Exercice S9E2*$^{(*)}$ (20 min) : Pendule sur plan incliné

On considère un pendule simple, soumis au champ de pesanteur $\vec{g}$, et formé par un point matériel M de masse m et un fil inextensible de longueur l attaché en O. Ce pendule glisse sans frottement sur une plaque plane faisant un angle γ avec l'horizontale (cf. schéma).



a) Calculez l'équation différentielle du mouvement.

b) La masse M est maintenant soumise à une force de frottement fluide $\vec{F}_f = -\alpha\vec{v}$. Déterminer la nouvelle équation différentielle du mouvement.

c) En faisant l'hypothèse d'un mouvement de faible amplitude devant l, déterminez la nouvelle équation différentielle du mouvement.

Formulaire :

Coordonnées polaires :

$\mathbf{v} = \dot{\rho}\mathbf{e}_\rho + \rho\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta$

$\mathbf{a} = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2\right)\mathbf{e}_\rho + \left(\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta}\right)\mathbf{e}_\theta$

*Difficulté des exercices : * facile ; ** moyen (niveau examen) ; *** difficile*

Le temps est indicatif et correspond au temps considéré en conditions d'examen

Coordonnées cylindriques :

$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{e_r} + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + \dot{z}\mathbf{e_z}$

$\mathbf{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\mathbf{e_r} + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\mathbf{e}_\theta + \ddot{z}\mathbf{e_z}$

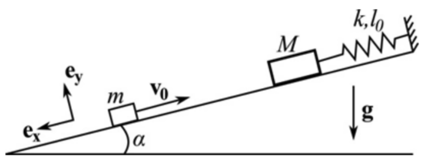
Coordonnées sphériques :

$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{e_r} + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + r\dot{\varphi}\sin\theta\mathbf{e}_\varphi$

$\mathbf{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right)\mathbf{e_r} + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\cos\theta\sin\theta\right)\mathbf{e}_\theta + \left(r\ddot{\varphi}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\right)\mathbf{e}_\varphi$

Exercice S9E3** (45 min) : Choc et ressort sur un plan incliné

On considère une masse M qui glisse sans frottement sur un plan incliné faisant un angle α avec l'horizontale. Cette masse est attachée à un ressort (raideur k, longueur au repos l_0) selon le schéma ci-contre.



Dans un premier temps, on ne tient compte que de la masse M (et pas de la masse m). Les masses sont considérées comme des points matériels.

a) Donnez la longueur du ressort à l'équilibre.

b) Calculez l'équation différentielle du mouvement de M de deux manières différentes :
   - En prenant comme origine le point d'attache du ressort.
   - En prenant comme origine la position d'équilibre calculée précédemment.

   Lequel des deux points d'origine est préférable pour étudier le mouvement de M ?

c) Déterminer les solutions de l'équation différentielle du mouvement dans les conditions initiales suivantes : la masse M est à la position d'équilibre calculée en (a), et la vitesse initiale est $\vec{v}_1 = v_1\vec{e}_x$.

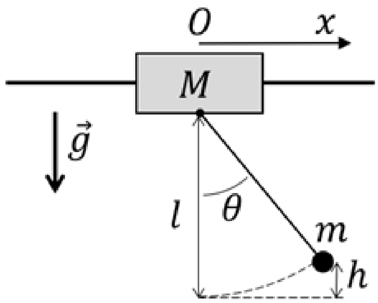
On place maintenant un objet de masse m (glissant sans frottement sur la rampe), que l'on envoie sur la masse M (au repos) ; juste avant l'impact, la vitesse de la masse m est $\vec{v}_0 = -v_0\vec{e}_x$. On suppose que le choc est élastique.

d) Calculez la vitesse v_1 de la masse M juste après le choc.

e) Par un bilan énergétique, calculez la compression maximale du ressort après le choc. Comparez avec le résultat obtenu dans la question (c).

Exercice S9E4** (40 min) : Pendule et masse sur rail (extrait d'examen)

Un pendule de masse m est relié par un fil inextensible de longueur l à une masse M pouvant se déplacer librement sans frottement sur un axe horizontal. Les masses sont considérées comme ponctuelles. Le champ de pesanteur est $\vec{g}$.



Première partie :

La masse M est fixe et le pendule subit une force de frottement fluide laminaire $\vec{F}_f = -K\eta\vec{v}$.

a) Faites un schéma sur lequel vous indiquerez les différentes forces et la vitesse de m.

b) On se place dans l'approximation aux petits angles ($\sin\theta \approx \theta$). Tracez l'évolution de l'angle θ en fonction du temps pour un amortissement faible. Les conditions initiales à $t = 0$ sont $\theta = \theta_0$ et $\dot{\theta} = 0$.

Deuxième partie :

La masse M est mobile. Les frottements sont négligeables.

c) On lâche le pendule d'une hauteur h (cf. schéma), les masses étant à l'arrêt. Calculez les vitesses des masses M et m lorsque le pendule est au point le plus bas.

d) Déterminez l'accélération de la masse M selon l'axe Ox en fonction de θ. On se limite au cas des petits angles ($\sin\theta \approx \theta$). Dans ce cas la norme de la tension du fil est mg.

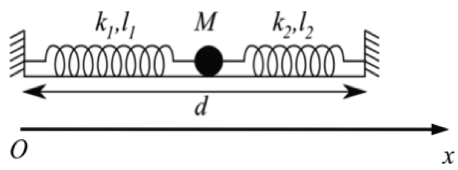
e) Exprimez l'équation du mouvement du pendule de masse m dans l'approximation aux petits angles. En déduire la pulsation des oscillations.

* * * * * * *

Exercices supplémentaires

Exercice S9ES1** (30 min) : Deux ressorts et une masse

Un point matériel sans dimension de masse M est attaché de chaque côté par deux ressorts de constante de raideur k_1 et k_2 et de longueur au repos l_1 et l_2. On note d la distance entre les deux parois auxquelles sont attachés les ressorts. On néglige tout frottement dans ce problème.



a) Dans un premier temps, on ne considère que le premier ressort (k_1, l_1) ; le deuxième ressort n'est pas attaché à la masse. Déterminez l'équation du mouvement de M.

On attache maintenant le deuxième ressort.

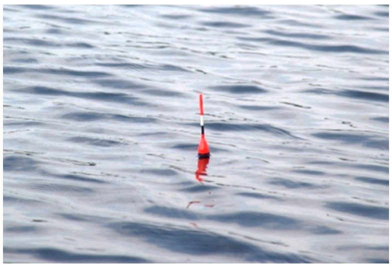
b) Déterminez la position d'équilibre de la masse M.

c) Déterminez l'équation du mouvement de la masse M.

d) À quelle fréquence la masse oscille-t-elle dans les deux cas ?

Exercice S9ES2** (40 min) : Le flotteur

Le flotteur (ou bouchon) d'une canne à pêche flotte à la surface de l'eau. Ce dernier est de forme cylindrique de rayon r, de hauteur h et de masse homogène. Le flotteur se tient verticalement dans l'eau et il se déplace de haut en bas en restant toujours partiellement immergé. En plus de son poids, le flotteur est soumis à la poussée d'Archimède $\vec{P}_A$ et à une force de frottement visqueux $\vec{F} = -k\eta\vec{v}$. La masse volumique du flotteur vaut les deux tiers de celle de l'eau : $\rho_f = \frac{2}{3}\rho_{eau}$.



a) Calculez la hauteur h' du flotteur qui se trouve immergée à l'équilibre.

b) Déterminez l'équation différentielle du mouvement du flotteur. Exprimez la pulsation propre ω_0 et le coefficient d'amortissement λ en fonction des données du problème.

c) On appuie sur le flotteur et il se met à osciller verticalement jusqu'à retrouver sa position d'équilibre. Que pouvez-vous dire sur le type d'amortissement ? Dessinez l'amplitude de l'oscillation en fonction du temps.